

Experiment 4-1

Fourier Optics-空間濾波原理及光學影像處理

目的：

認識傅氏光學、空間濾波及光學影像處理。

原理：

(1)繞射

光的波動理論可以用來解釋幾何光學（或 ray-optics）無法了解的一些物理現象，如干涉及繞射等。而其中的繞射可分為兩個範圍討論：

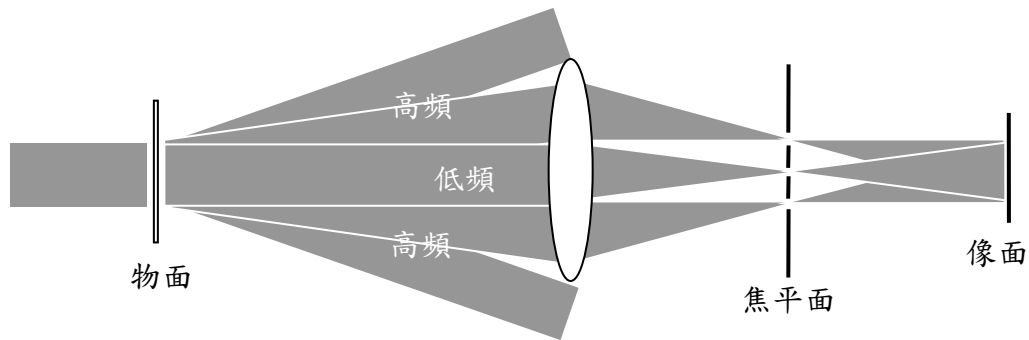
(i)遠場繞射(Far Field Diffraction)，又稱為 Fraunhofer 繞射。“遠場”的範圍定義為元件(例如狹縫)到光源與屏幕的距離遠大於元件本身尺寸。實驗室裡，常利用透鏡製造平行光，模擬光源自遠距離投射到元件。如此較節省空間，並可以較強的光強度進行實驗。狹縫實驗中，在遠處屏幕上觀察繞射圖案，由於狹縫大小遠小於與屏幕的距離，所以觀測到的圖案為遠場繞射圖案。在遠場的條件下，屏幕距狹縫之遠近並不會改變圖案的構造，只會使繞射圖案縮小或放大。若光強度減弱到不易觀察時，可以再利用透鏡將這遠處的繞射圖案映至此透鏡焦平面上來觀察。

(ii)近場繞射(Near Field Diffraction)，又稱為 Fresnel 繞射。其範圍定義為元件到光源與屏幕的距離接近於元件本身尺寸。此時光源入射於元件時，視為一球面波。球面波可以利用雷射光束通過一空間濾波器後或點光源產生擴散光波。

(2)傅氏轉換 Fourier Transform

Abbe 首先在 1873 年以 Fourier 轉換討論透鏡孔徑對成像的影響。Abbe 研究顯微鏡成像時，提出二次繞射成像的想法，並指出在利用相干光照明下，顯微鏡成像可以看成是兩個步驟的結果，如圖一。第一步，入射的平行光束照射物體，因物體產生繞射光波；接著，僅有部分的繞射光波可經過物鏡，並可在物鏡的後焦面上觀測其空間頻譜，此空間頻譜即為物面的傅氏轉換。第二步，此空間頻譜可接著在像平面上互相疊加，最後形成物的幾何像。

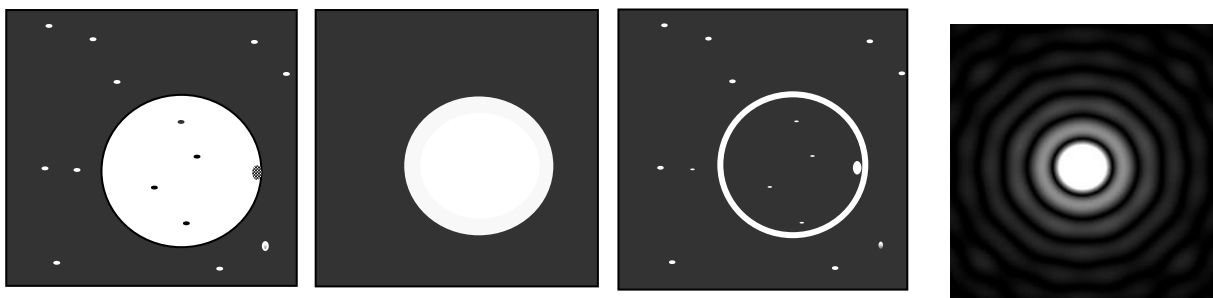
圖一中，平面光波經物體所產生的繞射光波將含許多方向，各方向的繞射光波來自物體資訊中不同的變化部分。比較接近光軸方向的光波，表示受物體影響較小，繞射現象較不明顯，即是空間頻率較低的部分，經過透鏡將會匯聚在接近光軸中心點上。而偏離光軸方向的光波，表示受物體影響較大，繞射現象較為明顯，即是空間頻率較高的部分，經過透鏡將會匯聚在偏離光軸中心點上。繞射光波及焦平面上的分佈狀況，可利用傅立葉轉換依空間頻率進行分析，可在焦平面上得到物體資訊的空間頻譜。



圖一 Abbe's 繞射成像原理

在光學信號處理時，只要在焦平面上，對物體的空間頻譜做出適當的處理，就等於是對物體光資訊進行處理。譬如遮住焦平面上光軸中心的部分光波，或是遮住偏離光軸的部分光波，即可達到對物體進行過濾高頻或過濾低頻信號的工作。

舉例來說，物面上一個具有雜訊的圓孔如下圖二(a)，雜訊及物體的邊緣屬於空間強度快速變化的部分即是所謂空間高頻，而其餘的部分白色不變以及黑色不變的部分則屬於空間低頻。若在傅氏面上進行濾波，過濾高頻資訊可以得到如圖二(b)的結果，而過濾低頻資訊可以得到圖二(c)的結果。



(a)

(b)

(c)

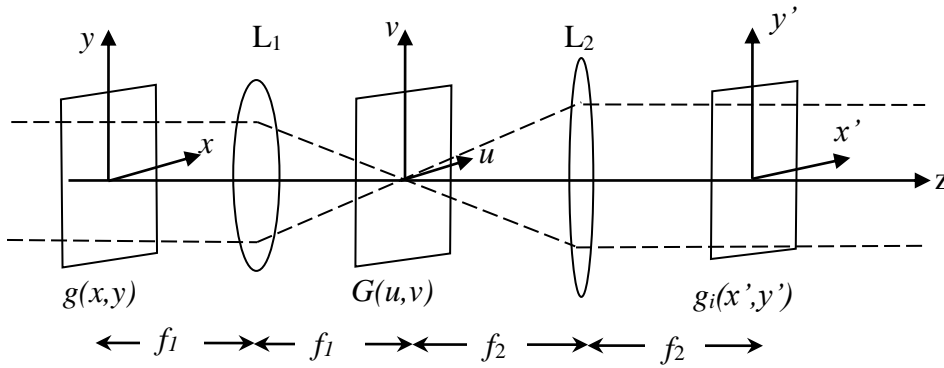
圖二、空間濾波

圖三、

Airy pattern

光學系統中，雷射光束經各元件後，常有因髒污或灰塵所引起的繞射點，空間濾波器即是用於濾波，去除光學系統中的雜訊。光束經空間濾波器的物鏡聚焦後，針孔擺在焦距位置濾掉高頻信號，而針孔孔徑大小的選擇，將決定了要濾掉的高頻頻帶的範圍，最後經過針孔後，可以看到再擴束的光束將會有較均勻的空間強度分佈。空間濾波器的物鏡倍率越大(小)，聚焦點越小(大)，所選擇的針孔直徑大小也越小(大)，才可適當的過濾不要的雜訊，並留下所需的低頻資訊。物鏡的聚焦點的大小由繞射極限所控制，與波長 λ 及物鏡的孔徑大小 D 、焦距 f 有關。聚焦點強度分佈，將成一 Airy Pattern(如圖三)，最中心0階亮圈的光波即是屬於低頻資訊，要讓其完全通過針孔，中心0階的亮圈半徑大

約為 $1.22 \frac{\lambda f}{D}$ 。由於針孔大小在微米級，所以製作上的精準度將與其價錢有關。為方便成本較低的針孔製造，可利用上式所計算出來的數值取近似使用。依此大約可得一簡單的計算式，物鏡的倍率與針孔孔徑大小的數字乘積約為 200，也就是(物鏡倍率 \times 針孔孔徑大小 μm) = 200 $\times \mu m$ 。例如: 20x 物鏡搭配 10 μm 針孔，10x 物鏡搭配 20 μm 針孔。



圖四、4-f 光學系統

一般常使用如圖四的 4-f 光學系統進行光資訊濾波處理，4-f 指的是物平面到像平面之間共有四個的焦距長。物面上物體 $g(x,y)$ 經過透鏡 L_1 ，在其焦平面(又稱為傅氏平面)形成該圖案之傅氏轉換 $G(u,v)$ ，可寫為

$$G(u,v) = \frac{A}{j\lambda f_1} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (1)$$

可寫為
$$G(u,v) = \frac{A}{j\lambda f_1} \mathfrak{F}_{L_1} \{g(x,y)\}, \quad (2)$$

式中 $\mathfrak{F}\{\}$ 代表傅氏轉換的操作，另外 $\frac{u}{\lambda f_1} = f_x$ ， $\frac{v}{\lambda f_1} = f_y$ ， f_x 及 f_y 為空間頻率(spatial frequency)，單位為 $1/m$ 。空間頻率的大小，代表物體的空間資訊的變化率，因此物體影像 $f(x,y)$ 的空間資訊的變化將依空間頻率大小分佈在 (u,v) 平面上。此空間頻譜 $G(u,v)$ 將再經透鏡 L_2 作第二次的傅氏轉換到像平面 (x',y') ，可寫為

$$g_i(x',y') = \frac{A'}{j\lambda f_2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(u,v) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f_2}(x'u + y'v)} dudv. \quad (3)$$

上式經計算可以證明，像平面上所得的 $g_i(x',y')$ 將會是原始物體放大 M 倍之後的影像，

$$g_i(x',y') = \frac{1}{|M|} g\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right). \quad (4)$$

以上的結果可用下式表示其過程，

$$g(x, y) \xrightarrow[L_1]{F.T.} G(u, v) \xrightarrow[L_2]{F.T.} g_i(x', y'), \quad (5)$$

也就是

$$g_i(x', y') = \mathfrak{F}_{L_2} \{G(u, v)\} = \mathfrak{F}_{L_2} \left\{ \mathfrak{F}_{L_1} \{g(x, y)\} \right\} = \frac{1}{|M|} g\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right). \quad (6)$$

若兩透鏡 L_1 及 L_2 的焦距相等，將(1)及(3)分別帶入式(6)，可以得到

$$g_i(x', y') = g(-x, -y). \quad (7)$$

此式說明，當物體經過兩次的傅氏轉換，將得到方向相反的原始物體。

另外，傅氏轉換 $F(f_x, f_y) = \mathfrak{F}\{f(x, y)\}$ 有七個定理，在本實驗中我們將討論並驗證其中

四個：線性定理、相似定理、位移定理以及傅氏積分定理。

線性定理 Linearity theorem：當物面上的物體可以線性比例相加其空間頻譜以同樣的線性比例相加。

$$\mathfrak{F}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathfrak{F}\{f\} + \beta \mathfrak{F}\{g\}. \quad (8)$$

相似定理 Similarity theorem：相似的物體尺寸大小越小(大)，代表空間上變化越快(慢)，也就是空間高(低)頻的資訊越多，頻譜面上的空間頻譜影像與原始相似，但尺寸將會放大(縮小)。

$$\mathfrak{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right). \quad (9)$$

位移定理 Shift theorem：物面上的物體若位置改變，其空間頻譜將多一相位項。但當以屏幕或 CCD 觀測時，由於只能觀測到強度，所以看不到此相位項。

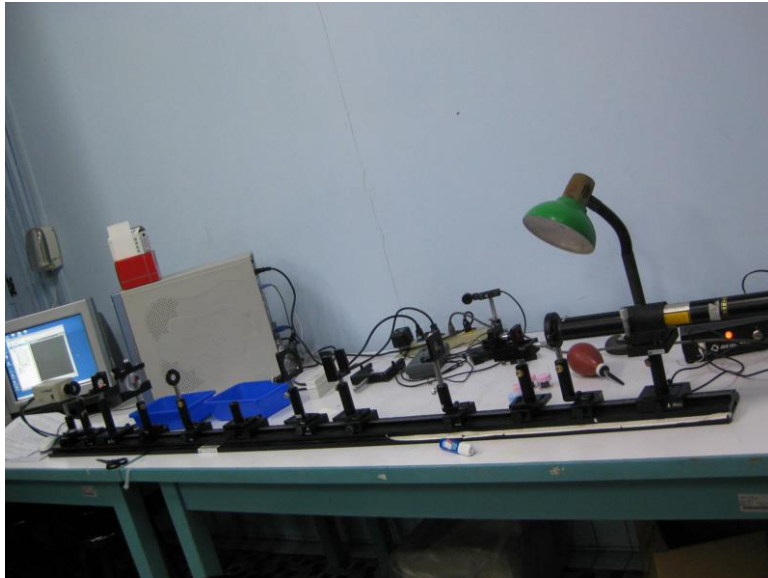
$$\mathfrak{F}\{f(x-p, y-q)\} = F(f_x, f_y) \exp[-j2\pi(f_x p + f_y q)]. \quad (10)$$


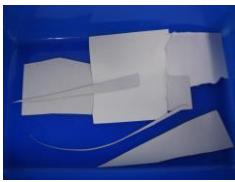







傅氏積分定理 Fourier integral theorem：物體連續經一次傅氏轉換及一次反傅氏轉換將可得到方向相同的原始物體。

$$\mathfrak{F}\left\{\mathfrak{F}^{-1}\{f(x, y)\}\right\} = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f(x, y)\}\} = f(x, y). \quad (11)$$

儀器：

He-Ne 雷射、透鏡、底片架、幻燈片(此即為光學系統的物，以下稱為物體)、光學滑塊、光學滑軌、空間濾波器(SF)、光圈(Iris)、濾光片、偏振片。參見圖五。

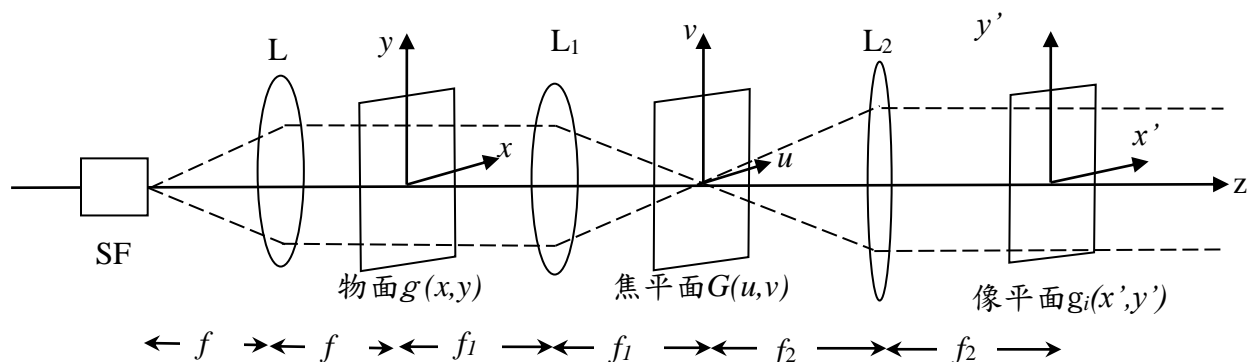


 <p>幻燈片(物體)</p>	 <p>裁剪的紙片</p>	 <p>可調式狹縫</p>	 <p>CCD</p>	 <p>Power meter</p>
 <p>針孔</p>	 <p>屏幕</p>	 <p>屏幕架</p>	 <p>屏幕架</p>	

圖五、實驗儀器照片

步驟：

1. 架設一 $4-f$ 系統如圖六所示，物面、頻譜面及成像面先以屏幕架訂出位置。由於需要以平面光波照射物面，所以在物面 $g(x,y)$ 之前加入空間濾波器(SF)以及一透鏡進行擴束及濾波(圖六)。選擇物鏡 $20\times$ ，所以針孔大小為 $10\ \mu\text{m}$ 。



圖六、 $4-f$ 光學系統(2)

空間濾波器原理

2. 在空間濾波器 $10\ \mu\text{m}$ 針孔存在的狀況下，以 CCD 偵測物面上光強度分佈圖，並量測最中心 0 階亮圈的半徑大小。將針孔取下，也以 CCD 偵測光強度分佈圖。比較前後兩張照片的差異，物面上哪些光波資訊不見了？
注意：若光強度太強，不易觀測，可在空間濾波器前放置一偏振片調整入射光的強度。
3. 在不改變針孔與物鏡的距離狀況下，將針孔大小分別換成 $20\ \mu\text{m}$ ，在物面上觀測所形成的 Airy pattern 強度分佈，並量測最中心 0 階亮圈的半徑大小。
注意：針孔取下後再裝回時，必須置於物鏡的焦點處。若光束未通過針孔，或是通過後的 Airy Pattern 中心偏移，可以改變針孔在 x 及 y 方向的位置；但不可改變物鏡針孔在 z 方向的間距，也就是不可調整物鏡移動座上的螺桿。
4. 將 $10\ \mu\text{m}$ 針孔安裝回空間濾波器上，並重新調整，使經過針孔的光束強度分佈均勻。

利用 $4-f$ 光學系統觀察經傅氏轉換所得的空間頻譜

注意：以下實驗中，由於空間頻譜尺寸大小與物體大小尺寸成反比，為了清楚觀察空間頻譜，物體尺寸越小越好。

5、長條狀物體

將具有一長條狹縫的幻燈片置於物面上，CCD 偵測頻譜面上的光強度分佈。

- (i) 由於物面(幻燈片)上空間資訊僅在垂直於狹縫長條方向上具有變化，其空間頻譜將成一具有多階暗紋的長條形狀，但其方向與原狹縫長條方相互垂直。請觀察、記錄實驗結果，並驗證本論述是否與實驗結果相符。
- (ii) 轉動狹縫的長條方向，觀察空間頻譜的改變並記錄。
- (iii) 改變狹縫的寬度，觀察和紀錄空間頻譜的改變，驗證相似定理。
- (iv) 移動狹縫的在 x,y 方向的位置，但狹縫長條方向不變，觀察和紀錄空間頻譜的改

變，驗證位移定理。

6. 驗證線性定理：在厚紙上、Airy pattern 範圍內挖 3 個小洞，再將厚紙置於物面上，用 CCD 偵測頻譜面上的光強度。再拿其他紙片遮這三個小洞的光，以 power meter 量測成像的光強度是否呈線性疊加的關係。

問題：

1. 證明原理中的(6)及(7)式。此證明中共有三個不同的座標，若混淆將導致證不出來。
2. 證明傅氏轉換七定理中之三個，也就是原理中的(8)~(10)式。